E-school di Arrigo Amadori

Analisi I

Funzioni reali continue

01 – Introduzione.

Fra tutte le funzioni numeriche reali, le funzioni continue assumono una importanza particolare. Le funzioni continue rappresentano la classe di funzioni più frequentemente utilizzate nei problemi di matematica e fisica. Per questo motivo il loro studio è basilare.

Intuitivamente una funzione continua è quella per cui, disegnandone il grafico cartesiano, "non si stacca la penna dal foglio". Il termine continuità ha quindi in matematica lo stesso significato che ha nel linguaggio comune.

Un altro modo di definire intuitivamente una funzione continua è che avvicinando a piacere due punti del suo dominio, anche i corrispondenti punti del codominio si avvicinano a piacere.

E' chiaro che siffatte definizioni empiriche non possono soddisfare l'esigenza di precisione ed assiomaticità della matematica moderna. Vedremo nei prossimi paragrafi come si definisce esattamente una funzione continua nonché le sue principali proprietà.

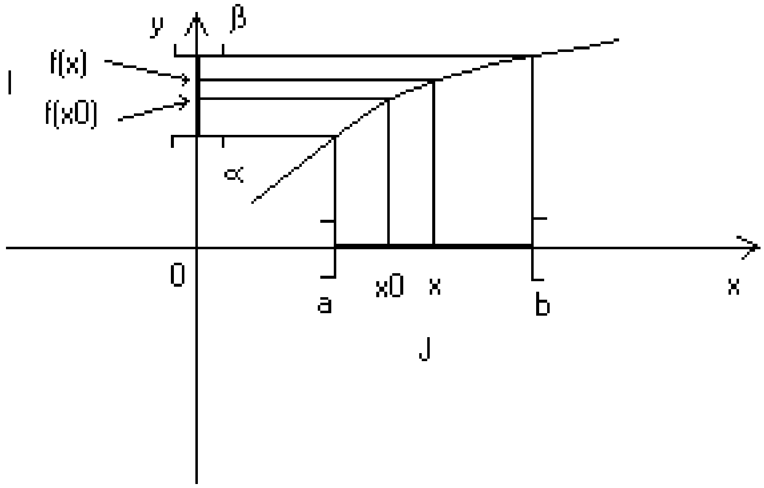
02 – Funzioni reali continue.

Una funzione f appartenete a FA (l'insieme delle funzioni numeriche reali definite su A , sottoinsieme di R) si dice **continua** nel punto x0 appartenente ad A se comunque si prende un intervallo aperto I contenente f(x0) , esiste in corrispondenza un intervallo aperto J contente x0 e tale che tutte le immagini f(x) con x appartenete a J intersecato con A cadono in I .

Ovvero :

$$\forall \,]\alpha,\beta[\ni f(x_0) \in \,]\alpha,\beta[\; \exists \,]a,b[\ni x_0 \in \,]a,b[\,,\, f(x) \in \,]\alpha,\beta[\; \forall x \in \,]a,b[\cap A$$

Graficamente :



Se una funzione è continua in ogni punto appartenente ad un sottoinsieme B di A , essa si dice continua su B.

Per le funzioni continue valgono i seguenti importanti teoremi :

- se f è una funzione numerica reale e x0 appartiene al dominio A intersecato con D(A) (derivato di A), allora sono equivalenti le seguenti tre affermazioni :

  1 – f è continua in x0

  2 – il limite di f in x0 è f(x0)

  3 – se una qualunque successione xn in A converge a x0 , allora f(xn) converge a f(x0)

- se f e g sono funzioni numeriche reali con dominio A continue in x0 appartenente ad A allora :

  f + g è continua in x0

  f – g è continua in x0

  f * g è continua in x0

  f / g è continua in x0 se g(x) ≠ 0 per ogni x appartenente ad A

  |f| è continua in x0

  c * f è continua in x0, dove c è un numero reale qualunque

L’insieme delle funzioni numeriche reali di dominio A continue su tutto A viene indicato con

C_A

Ovviamente CA è un sottoinsieme proprio di FA.

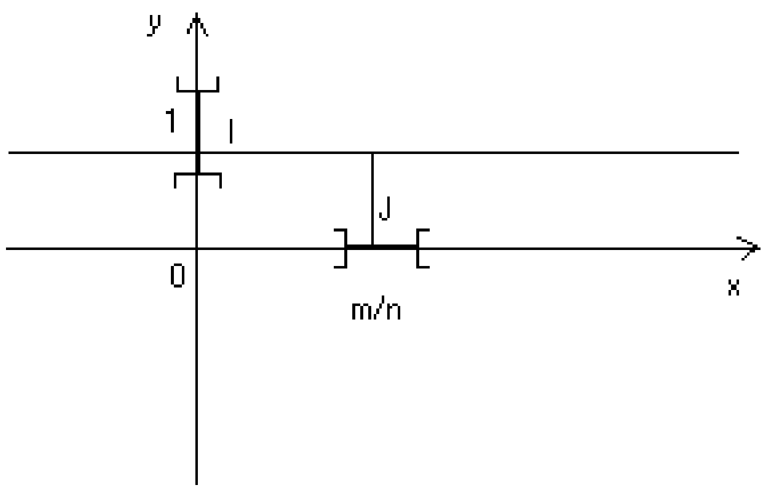
In generale una funzione numerica reale può essere non continua (discontinua) in nessuno, uno o più punti del suo dominio e l’insieme dei **punti di discontinuità** può essere finito, infinito numerabile o infinito continuo (ovvero con cardinalità 0 , n , alef0 oppure alef1).

E’ interessante notare che esistono funzioni non continue in nessun punto del loro dominio. Un esempio di ciò è la funzione di Dirichlet definita così :

f(x) = 1 se x è razionale

f(x) = 0 se x è irrazionale

La funzione di Dirichlet è discontinua in ogni punto del dominio R perché in ogni intervallo aperto sull’asse delle x , per piccolo che sia, esistono infiniti numeri razionali ed infiniti numeri irrazionali.



Dal grafico si vede che l’intervallo J che contiene il numero razionale m/n , che ha immagine 1 contenuta nell’intervallo I , contiene anche numeri irrazionali che hanno immagine 0 , quindi fuori da I e questo per qualunque intervallo J. Ciò vale anche considerando un numero irrazionale del dominio. Questo dimostra intuitivamente che la funzione di Dirichlet è discontinua in ogni punto di R .

03 – Prolungamento continuo.

Consideriamo due insiemi A e B sottoinsiemi di R , di cui A è sottoinsieme proprio di B ed è denso in B (ovvero B è sottoinsieme della chiusura di A).

Siano f e g due funzioni continue in B . Se le restrizioni di f e g ad A sono uguali, allora f e g sono uguali.

Se invece g è continua in A e converge in ogni punto di B – A , allora esiste una sola funzione f continua in B tale che la restrizione di f ad A (f/A) è uguale a g .

Questa funzione f si chiama **prolungamento continuo** di g su B.

Questo importate teorema (di cui omettiamo al dimostrazione) ci permette di prolungare una funzione continua, definita in un insieme, ai punti di accumulazione dell'insieme che non appartengono all'insieme stesso. Prolungare significa quindi creare una nuova funzione che sia uguale alla vecchia nei punti dell'insieme di partenza e che abbia lo stesso "comportamento" nei nuovi punti (punti di accumulazione del vecchio insieme che non appartengono allo stesso).

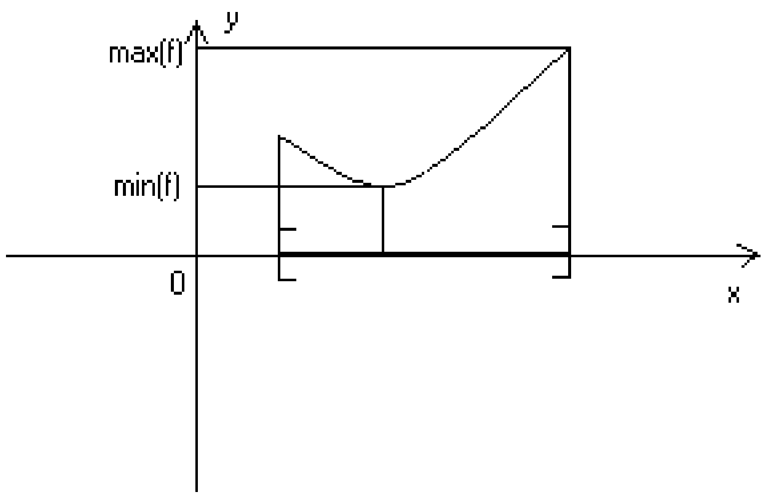
Come esempio di ciò consideriamo l'insieme Q dei numeri razionali e l'insieme R dei numeri reali. Q è denso in R e R – Q è l'insieme dei numeri irrazionali.

Sia definita su Q la funzione y = x * x. Orbene il precedente teorema assicura che y può essere prolungato sull'intero R. Il prolungamento sarà ovviamente y = x * x con x reale.

04 – Funzioni continue limitate.

Se il dominio di una funzione continua è limitato e chiuso, allora la funzione possiede un massimo ed un minimo. Questo importante teorema (di cui omettiamo al dimostrazione) è dovuto a Weierstrass.

Diamo un esempio grafico :



05 – Funzioni uniformemente continue.

Abbiamo definito la continuità di una funzione in un punto e su di un insieme. E' possibile però distinguere fra continuità (così come è stata definita precedentemente) e continuità uniforme in base al modo in cui una funzione è continua in tutti i punti di un insieme.

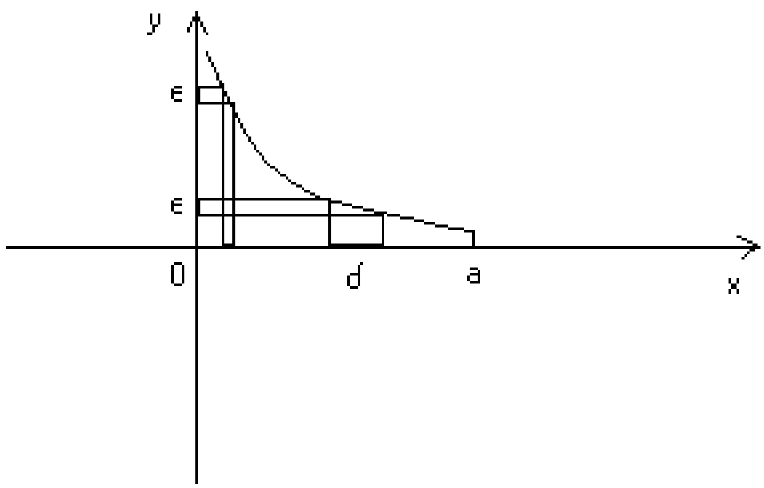
Una funzione numerica reale definita su   A si dice **uniformemente continua** su   A se :

$$\forall \varepsilon \in R^{+} \exists \delta(\varepsilon) \in R^{+} \ni \left|f(x') - f(x'')\right| < \varepsilon, \forall x', x'' \in A, \left|x' - x''\right| < \delta(\varepsilon)$$

La continuità uniforme implica la continuità, ma non viceversa.

La funzione   y = x * x   è uniformemente continua su   [-1 , +1] e continua sullo stesso dominio.

La funzione   y = 1/x è continua su]0 , a] (a > 0) ma non è ivi uniformemente continua. Infatti, se osserviamo il grafico (omettiamo la dimostrazione esatta limitandoci ad una dimostrazione intuitiva) :



si nota che preso un   ε   qualunque, non è possibile prendere un corrispondente   δ   ben definito perché la scelta di   δ   dipende dalla vicinanza all’origine. Più ci si avvicina all’origine più il   δ   corrispondente si avvicina a 0.

La continuità uniforma esprime quindi un modo “uniforme” per una funzione di essere continua in tutto il dominio.

Per le funzioni uniformemente continue vale l’ importante teorema di Heine-Cantor :

> se il dominio   A di una funzione numerica reale continua è limitato e chiuso, allora la funzione è uniformemente continua su   A   (omettiamo la dimostrazione).

05 – Funzioni assolutamente continue.

Una funzione può essere continua od anche uniformemente continua su un intervallo   [a , b] ma per esempio “oscillare” (nel tendere ad un punto) così tanto che la variazione della funziona in questa oscillazione non può essere presa piccola a piacere.

Sia   f una funzione numerica reale definita sull’intervallo [a , b] . La funzione   f   si dice che è **assolutamente continua** su [a , b] se :

$$\forall \varepsilon \in R^{+} \exists \delta(\varepsilon) \in R^{+}$$

tale che, qualunque sia n appartenente ad N e qualunque siano i sottointervalli di [a , b] definiti come :

$$\left[\alpha_j , \beta_j\right], j = 1,2,\ldots n$$

$$tali \quad che$$

$$\left]\alpha_i , \beta_i\right[\bigcap \left]\alpha_j , \beta_j\right[= \phi, i \neq j$$

risulta :

$$\sum_{i=1}^{n} \left| f(\beta_i) - f(\alpha_i) \right| < \varepsilon$$

$$con$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \beta_i - \alpha_i \right| < \delta(\varepsilon)$$

La assoluta continuità implica la uniforme continuità (e quindi la continuità) ma non viceversa.

Fine.

Pagina precedente

Home page